

Soluções analíticas da Equação de Schrödinger para o caso geral do Potencial Pseudo-Coulombiano. Rita de Cássia dos Anjos, Elso Drigo Filho. - Física – Física Biológica – Departamento de Física – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas – Campus de São José do Rio Preto

A equação de Schrödinger é a base da formulação via equações diferenciais da Mecânica Quântica. Ao se resolver a equação para estruturas quânticas, se determina as funções de onda (associadas a probabilidade de se encontrar o sistema em determinado estado) e os autovalores de energia (níveis de energia permitidos ao sistema). As soluções dessa equação proporcionam uma melhor compreensão da natureza em vários aspectos, por exemplo, relacionadas com as estruturas atômicas e subatômicas e nos avanços tecnológicos significativos, como por exemplo, no desenvolvimento de semicondutores.

Supersimetria surgiu no contexto de Física de Partículas e Campos e permite relacionar bósons e férmions, isto é, partículas que obedecem a estatística de Bose-Einstein ou de Fermi-Dirac. Em 1981, Witten visando esclarecer as propriedades essenciais desta simetria introduziu a supersimetria em uma Teoria de Campos em (1+0) dimensões, ou seja, a Mecânica Quântica Supersimétrica; onde o tempo  $t$  é a coordenada e a posição  $x(t)$  é o próprio campo. Uma aplicação bastante interessante deste formalismo é seu uso para obter soluções da equação de Schrodinger.

É possível resolver exata e analiticamente a equação de Schrodinger para alguns tipos de sistemas, como o oscilador harmônico e o átomo de hidrogênio. O formalismo supersimétrico consiste em fatorizar o hamiltoniano original, o qual é constituído por um operador diferencial de ordem dois, em dois operadores de ordem um, denominados operadores bosônicos. Ao se igualar o hamiltoniano fatorizado com o hamiltoniano original, obtém-se uma equação diferencial de primeira ordem não-linear denominada equação de Ricatti. Ao se resolver esta equação de Ricatti se encontra um superpotencial que pode ser usado para determinar a autofunção e o autovalor de energia correspondente. O formalismo é demonstrado abaixo:

Partindo de um dado Hamiltoniano original ( $H_0$ ), que possa ser fatorizado, ele pode ser escrito como:

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + V(x) \equiv A^+ A^- + E_0 \quad (1)$$

onde  $E_0$  representa o autovalor do nível mais baixo de energia do Hamiltoniano ( $H_0$ ) e os operadores bosônicos são dados em termos do superpotencial  $W(x)$ :

$$A^\pm = \mp \frac{d}{dx} + W(x) \quad (2)$$

Substituindo (1) em (2) percebe-se que o superpotencial deve satisfazer a seguinte equação de Ricatti:

$$W^2 - W' + E_0 = V(x) \quad (3)$$

onde  $W'$  indica a derivada do superpotencial com respeito a variável  $x$ .

A função de onda do estado fundamental ( $\psi_0$ ) pode ser obtida sabendo que o operador bosônico de “destruição” aplicado a esta função é igual a zero,  $A^- \psi_0 = 0$ .

Assim, usando a definição (2) para  $A^-$  obtém-se, a menos da constante de normalização, que:

$$\psi_0 \propto \exp\left[-\int W(\bar{x})d\bar{x}\right] \quad (4)$$

A supersimetria permite criar uma família de hamiltonianos e, com isso determinar as autofunções e os autovalores de energia, funcionando como um método matemático de se resolver a equação de Schrodinger.

Além de tratar hamiltonianos que possuem soluções analíticas e exatas, a supersimetria tem sido bastante útil no estudo de uma classe de potenciais chamados de parcialmente solúveis, onde apenas parte do espectro pode ser determinado analiticamente.

Recentemente, um potencial pseudoharmônico foi tratado por meio do estudo direto das funções de onda. O tratamento usando supersimetria facilita a análise desse problema, permitindo chegar às mesmas conclusões.

Outro potencial de bastante interesse físico é o potencial de Coulomb. Neste potencial o número quântico do momento angular desempenha um importante papel na descrição da superfamília, uma vez que para cada valor de  $l$  é obtido toda uma Hierarquia de Hamiltonianos. Neste trabalho é introduzido um Potencial Pseudo-Coulombiano:

$$V(r) = \frac{a^2}{r^2} - \frac{b}{r} + c$$

no qual  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes arbitrárias e, são apresentadas suas soluções analíticas obtidas pelo formalismo supersimétrico. Essas soluções são inéditas na literatura.

As funções de onda obtidas e os autovalores encontrados foram:

$$E_0^{(n+1)} = c - \frac{b^2}{4(\gamma + n + 1)^2} \quad \text{e} \quad \Psi_n^1 \propto A_1^+ A_2^+ \dots A_n^+ \left[ r^{(\gamma+n+n)} \cdot e^{-\frac{b}{2(\gamma+n+1)}} \right] \quad (5)$$

$$\text{onde } \gamma = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4(a^2 + l(l+1))}}{2} \quad (6)$$

## Referências

- [1] FILHO, D. E. Rev. Brás. Ens. Fis. 19, 1997, p 152
- [2] FILHO, D. E. Rev. Brás. Ens. Fis. 21, 1999, p 233
- [3] FILHO, D. E; RICOTTA, M.R. Mod. Phya. Lett A, a989, p 2283
- [4] ANJOS, C. R; FILHO, D. E; RICOTTA, M. R. Caderno de REsumoas da XXXVII Latin-American School of Physics, 2006, p 02
- [5] DONG S; MA, Z. J. Math. Phys 31 , 1998, p 49

